Kongruenz-Beweis für einen neuen Operator

Aufgabe

Reiner-Theo Retiker hat einen neuen Operator für CCS-Ausdrücke entwickelt: Den Poice[1]-Operator $\Vvdash$. Syntaktisch verhält er sich wie $+$ und $|$:

$$P \quad ::= \quad 0 \quad | \quad X \quad | \quad \cdots \quad | \quad P \Vvdash P$$

Seine Semantik geben wir durch zwei Inferenzregeln an.

Poice verhält sich rechtsseitig wie der $+$-Operator:

$$\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P \Vvdash Q \xrightarrow{\alpha} Q'}\ \text{poice\_r}$$

Auf der linken Seite verhält sich Poice dagegen analog zum $|$-Operator:

$$\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P \Vvdash Q \xrightarrow{\alpha} P' \Vvdash Q}\ \text{poice\_l}$$

Beachten Sie, dass Poice damit weder einen rein statischen noch einen rein dynamischen Operator darstellt.

Zeigen Sie, dass starke Bisimilarität eine Kongruenzrelation bezüglich Poice ist.

Auf der nächsten Seite folgt die Lösung.

Ich empfehle dringend, den Beweis selber zu versuchen.
Wir korrigieren gerne halbe Lösungen und geben euch Tipps, wie es weitergeht.
Kommt einfach in die Office-Hour oder schreibt eine Mail an euren Tutor.

[1] **P**ar + **C**oice

Lösung

Formalisierung der Aussage

Was müssen wir eigentlich zeigen? Da Poice nicht symmetrisch ist, gibt es hier zwei Aussagen, die wir zeigen müssen:

1. $\forall P, Q, R \in CCS: \quad P \sim R \Rightarrow (P \Vvdash Q) \sim (R \Vvdash Q)$
2. $\forall P, Q, R \in CCS: \quad P \sim R \Rightarrow (Q \Vvdash P) \sim (Q \Vvdash R)$

Beweis von Aussage 1

Wir zeigen also: $\forall P, Q, R \in CCS: \quad P \sim R \Rightarrow (P \Vvdash Q) \sim (R \Vvdash Q)$

Seien $P, Q, R \in CCS$ beliebig. Wir nehmen $P \sim R$ an. Bleibt noch zu zeigen: $(P \Vvdash Q) \sim (R \Vvdash Q)$

Wir müssen nun eine Bisimulation angeben, die die Aussage beweist. Wir setzen:

$$\mathcal{R} := \{(A \Vvdash C, B \Vvdash C) \mid A, B, C \in CCS \ \wedge \ A \sim B\} \cup \sim$$

Falls es sich bei $\mathcal{R}$ um eine Bisimulation handelt, sind wir fertig, denn $(P \Vvdash Q)\ \mathcal{R}\ (R \Vvdash Q)$ gilt gemäß unserer Definition von $\mathcal{R}$, da $P, Q, R \in CCS$ und $P \sim R$ laut Annahme.

Bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine Bisimulation ist.

1. Für alle $s\ \mathcal{R}\ t$ und $\alpha \in Act$ ist zu zeigen: Wenn $s \xrightarrow{\alpha} s'$, dann gibt es eine Transition $t \xrightarrow{\alpha} t'$, so dass $s'\ \mathcal{R}\ t'$.

   Dies ist für alle (s, t) aus $\sim$ klar, da $\sim$ *die* Bisimilarität ist.

   Also müssen wir noch den Fall betrachten, dass (s, t) aus der ersten Teilmenge kommt, also die Form $(A \Vvdash C, B \Vvdash C)$ hat. Nehmen wir also an, dass $A \Vvdash C$ eine Transition ausführen kann. Dafür kommen nur zwei Ableitungsregeln in Betracht.

   - $A \Vvdash C \xrightarrow{\alpha} A' \Vvdash C$ mit poice_l.

     Dann muss laut poice_l auch gelten, dass $A \xrightarrow{\alpha} A'$. Da $A \sim B$ laut Definition von $\mathcal{R}$ gelten muss, folgt daraus, dass $B \xrightarrow{\alpha} B'$ für ein B', so dass $A' \sim B'$ gilt.

     Mit poice_l gilt aber auch $B \Vvdash C \xrightarrow{\alpha} B' \Vvdash C$, und da $A' \sim B'$ gilt, gilt auch $(A' \Vvdash C)\ \mathcal{R}\ (B' \Vvdash C)$.

   - $A \Vvdash C \xrightarrow{\alpha} C'$ mit poice_r.

     Dann muss laut poice_r auch gelten, dass $C \xrightarrow{\alpha} C'$.

     Daraus folgt (wieder mit poice_r), dass auch $B \Vvdash C \xrightarrow{\alpha} C'$ gelten muss. Offensichtlich gilt auch $C'\ \mathcal{R}\ C'$, da $\mathcal{R} \supseteq \sim$ und $\sim$ reflexiv ist.

2. Für alle $s\ \mathcal{R}\ t$ und $\alpha \in Act$ ist zu zeigen: Wenn $t \xrightarrow{\alpha} t'$, dann gibt es eine Transition $s \xrightarrow{\alpha} s'$, so dass $s'\ \mathcal{R}\ t'$.

   Dies folgt völlig analog zum ersten Teil durch Vertauschen der Bezeichner A und B[2].

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{R}$ eine Bisimulation ist. □

Beweis von Aussage 2

Wir zeigen also: $\forall P, Q, R \in CCS: \quad P \sim R \Rightarrow (Q \Vvdash P) \sim (Q \Vvdash R)$.

Seien $P, Q, R \in CCS$ beliebig. Wir nehmen $P \sim R$ an. Bleibt noch zu zeigen: $(Q \Vvdash P) \sim (Q \Vvdash R)$

Wir müssen nun eine Bisimulation angeben, die die Aussage beweist. Wir setzen:

$$\mathcal{R} := \{(A \Vvdash B, A \Vvdash C) \mid A, B, C \in CCS \ \wedge \ B \sim C\} \cup \sim$$

Falls es sich bei $\mathcal{R}$ um eine Bisimulation handelt, sind wir fertig, denn $(Q \Vvdash P)\ \mathcal{R}\ (Q \Vvdash R)$ gilt gemäß unserer Definition von $\mathcal{R}$, da $P, Q, R \in CCS$ und $P \sim R$ laut Annahme.

Bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine Bisimulation ist.

[2] außer im Teilsatz „also die Form $(A \Vvdash C, B \Vvdash C)$ hat“

1. Für alle $s \mathcal{R} t$ und $\alpha \in Act$ ist zu zeigen: Wenn $s \xrightarrow{\alpha} s'$, dann gibt es eine Transition $t \xrightarrow{\alpha} t'$, so dass $s' \mathcal{R} t'$.

   Dies ist für alle (s, t) aus $\sim$ klar, da $\sim$ *die* Bisimilarität ist.

   Also müssen wir noch den Fall betrachten, dass (s, t) aus der ersten Teilmenge kommt, also die Form $(A \Vdash B, A \Vdash C)$ hat. Nehmen wir also an, dass $A \Vdash B$ eine Transition ausführen kann. Dafür kommen nur zwei Ableitungsregeln in Betracht.

   - $A \Vdash B \xrightarrow{\alpha} A' \Vdash B$ mit poice_l.

     Dann muss laut poice_l auch gelten, dass $A \xrightarrow{\alpha} A'$. Mit poice_l gilt dann aber auch $A \Vdash C \xrightarrow{\alpha} A' \Vdash C$.

     Da $B \sim C$ laut Definition von $\mathcal{R}$ gelten muss, gilt auch $(A' \Vdash B) \mathcal{R} (A' \Vdash C)$.

   - $A \Vdash B \xrightarrow{\alpha} B'$ mit poice_r.

     Dann muss laut poice_r auch gelten, dass $B \xrightarrow{\alpha} B'$. Laut Definition von $\mathcal{R}$ muss auch gelten, dass $B \sim C$.

     Da $B \sim C$ und $B \xrightarrow{\alpha} B'$, muss auch $C \xrightarrow{\alpha} C'$ mit $B' \mathcal{R} C'$.

     Aus $C \xrightarrow{\alpha} C'$ folgt (wieder mit poice_r), dass auch $A \Vdash C \xrightarrow{\alpha} C'$ gelten muss. $B' \mathcal{R} C'$ ist schon gezeigt.

2. Für alle $s \mathcal{R} t$ und $\alpha \in Act$ ist zu zeigen: Wenn $t \xrightarrow{\alpha} t'$, dann gibt es eine Transition $s \xrightarrow{\alpha} s'$, so dass $s' \mathcal{R} t'$.

   Dies folgt völlig analog zum ersten Teil durch Vertauschen der Bezeichner B und C[3].

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{R}$ eine Bisimulation ist. □

Fazit

Damit haben wir nun gezeigt, dass starke Bisimilarität eine Kongruenzrelation bezüglich Poice ist. ■

[3] außer im Teilsatz „also die Form $(A \Vdash B, A \Vdash C)$ hat“